ある対称式の冪乗から

～ 数値実験と理論検証との協働による ～

2017 年 2 月
坂 田 雅 弘

1. はじめに

大学入試において，定数 $a\in\boldsymbol{R}$，$x\in\boldsymbol{C}$，$n\in\boldsymbol{N}$，$x+\dfrac{1}{x}=a$ に対する $f_a(n)=x^n+\dfrac{1}{x^n}$ を求める計算は頻出問題である． $f_a(n)$はnの関数であるが，nを固定すれば，

$$f_a(2)=a^2-2,\quad f_a(3)=a^3-3a,\quad f_a(4)=a^4-4a^2+2 \tag{1.1}$$

のように，$f_a(n)$をaの多項式として表すことができる．

この $f_a(n)$の振る舞いは初期値aの値により変動する．たとえば，$a=3$ならば，

$$f_3(2)=7,\quad f_3(3)=18,\quad f_3(4)=47,\quad f_3(5)=123,\quad f_3(6)=322,\quad \cdots\cdots$$

すなわち $f_a(n)$は単調増大で $\lim_{n\to\infty} f_3(n)=\infty$ となり，$a=-1$ならば，

$$f_{-1}(2)=-1,\quad f_{-1}(3)=2,\quad f_{-1}(4)=-1,\quad f_{-1}(5)=-1,\quad f_{-1}(6)=2,\quad \cdots\cdots$$

のように周期性をもって循環する．

筆者は，これらの発見をもとに$n\in\boldsymbol{N}$における $f_a(n)$の性質を考察した．

2. $f_a(n)$のaによる表現

$f_a(n)$が漸化式

$$f_a(n)=f_a(1)\,f_a(n-1)-f_a(n-2) \tag{2.1}$$

をみたすことは，右辺を計算すれば容易にわかる．

これを用いて $f_a(2)$，$f_a(3)$，……を具体的に計算すると，

$$f_a(n)=a^n-na^{n-2}+\frac{1}{2!}n(n-3)a^{n-4}-\frac{1}{3!}n(n-4)(n-5)a^{n-6}$$
$$+\frac{1}{4!}n(n-5)(n-6)(n-7)a^{n-8}-\frac{1}{5!}n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)a^{n-10}+\cdots\cdots$$

すなわち，

$$f_a(n)=a^n+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{\frac{(-1)^k\cdot n}{k!}\left(\prod_{i=k+1}^{2k-1}(n-i)\right)a^{n-2k}\right\}\quad (n\geq 2) \tag{2.2}$$

（ $k\in\boldsymbol{N}$は$n\geq 2k$をみたすものとし，$p>q$のときは$\displaystyle\prod_{i=p}^{q}g(i)=1$と定める）

が予想される．

(2.2) を数学的帰納法により示そう. (1.1) は (2.2) をみたすから, $n \geq 2k$ となる k に対し, $f_a(n)$ における第 $(k+1)$ 項が,

$$\frac{(-1)^k \cdot n}{k!}\left(\prod_{i=k+1}^{2k-1}(n-i)\right)a^{n-2k} \qquad (k \geq 2) \tag{2.3}$$

になることを (2.1) を用いて示せばよい. 実際, $n-1$ 以下の場合について (2.3) が成り立つとすれば, $f_a(n-1)$ の値の第 $(k+1)$ 項に a を乗じたものと $f_a(n-2)$ の第 k 項との差

$$\frac{(-1)^k \cdot (n-1)}{k!}\left(\prod_{i=k+1}^{2k-1}(n-i)\right)a^{(n-1)-2k} \cdot a - \frac{(-1)^{k-1} \cdot (n-2)}{(k-1)\,!}\left(\prod_{i=k}^{2k-3}(n-i)\right)a^{n-2k}$$

を計算することで (2.3) が得られる.

なお, $x + \dfrac{1}{x} = a$ より $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$ であるから, この 2 解 α, β を用いて

$$f_a(n) = \alpha^n + \beta^n \tag{2.4}$$

と表すこともできる. 余談ながら, $a=3$ のときは,

$$f_3(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}$$ (Lucas 数列 $\{L_{2n}\}$ の一般項)

であるから, これより, Lucas 数列 $\{L_n\}$ および Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ との関係

$$f_3(n) = F_{2n-1} + F_{2n+1} = L_{2n} \tag{2.5}$$

に気づくであろう.

3. $f_a(n)$ の基本的性質

前節で得た (2.2) または (2.4) を Excel に入力して数値実験すると,

$$|a| > 2 \text{ ならば, } f_a(n) \text{ は単調増大, すなわち } \lim_{n\to\infty}|f_a(n)| = \infty$$

$$|a| \leq 2 \text{ ならば, 任意の } n \in \boldsymbol{N} \text{ に対し, } |f_a(n)| \leq 2 \tag{3.1}$$

が予想される. $|a| \leq 2$ の場合, たとえば, $a = \pm\sqrt{2}$ ならば,

$$f_{\pm\sqrt{2}}(8k \pm 1) = \pm\sqrt{2},\ f_{\pm\sqrt{2}}(8k \pm 2) = 0,\ f_{\pm\sqrt{2}}(8k \pm 3) = \mp\sqrt{2},\ f_{\pm\sqrt{2}}(4k) = 2\cdot(-1)^k$$

(任意の $m \in \boldsymbol{N}$ に対し, $f_{\pm\sqrt{2}}(m) = f_{\pm\sqrt{2}}(m+8)$.)

のように周期 8 をもち, $a = \pm\sqrt{3}$ ならば,

$$f_{\pm\sqrt{3}}(12k \pm 1) = \pm\sqrt{3},\ f_{\pm\sqrt{3}}(12k \pm 2) = 1,\ f_{\pm\sqrt{3}}(12k \pm 3) = 0,$$

$$f_{\pm\sqrt{3}}(12k \pm 4) = -1,\ f_{\pm\sqrt{3}}(12k \pm 5) = \mp\sqrt{3},\ f_{\pm\sqrt{3}}(6k) = 2\cdot(-1)^k$$

(任意の $m \in \boldsymbol{N}$ に対し, $f_{\pm\sqrt{3}}(m) = f_{\pm\sqrt{3}}(m+12)$.)

のように周期 12 をもつ. これらは (2.1) を用いて容易に示せる. しかし, 周期性が見られ

ない場合も少なくない（たとえば，$a=1.5$，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$-\dfrac{1}{\pi}$ など）.

$|a|\le 2$ をみたす任意の $a\in\boldsymbol{R}$ に対して $a=2\cos\theta$ をみたす $\theta\,(\in\boldsymbol{R},\ 0\le\theta\le\pi)$ が一意的に存在するから,（1.1）より,

$$\left.\begin{aligned}
f_{2\cos\theta}(2)&=4\cos^2\theta-2=4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}-2=2\cos 2\theta\\
f_{2\cos\theta}(3)&=8\cos^2\theta-6\cos\theta=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=2\cos 3\theta\\
f_{2\cos\theta}(4)&=16\cos^4\theta-16\cos^2\theta+2=2(8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1)=2\cos 4\theta
\end{aligned}\right\}\quad(3.2)$$

が得られ,

$$f_{2\cos\theta}(n)=2\cos n\theta \qquad (3.3)$$

が予想される.

（3.3）を数学的帰納法により示そう.（3.2）は（3.3）をみたすから，$n-1$ 以下の場合について（3.3）が成り立つとすれば,（2.1）および積和公式より,

$$\begin{aligned}
&f_{2\cos\theta}(n)=f_{2\cos\theta}(1)\,f_{2\cos\theta}(n-1)-f_{2\cos\theta}(n-2)\\
&=2\cos\theta\cdot 2\cos(n-1)\theta-2\cos(n-2)\theta=4\cdot\frac{1}{2}\{\cos n\theta+\cos(n-2)\theta\}-2\cos(n-2)\theta\\
&=2\cos n\theta
\end{aligned}$$

を得る．これより，$x=\cos\theta$ に対する Chebyshev 多項式 $T_n(x)=\cos n\theta$ との関係

$$f_{2\cos\theta}(n)=2T_n(x)$$

も得られる．また,（3.3）の別証明として,（2.4）および de Moivre の定理を用いて,

$$\begin{aligned}
&f_{2\cos\theta}(n)=\left(\frac{2\cos\theta+\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}\right)^n+\left(\frac{2\cos\theta-\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}\right)^n\\
&=\left(\cos\theta+\sqrt{-\sin^2\theta}\right)^n+\left(\cos\theta-\sqrt{-\sin^2\theta}\right)^n\\
&=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)\\
&=2\cos n\theta
\end{aligned}$$

のように示す方法もある．いずれにせよ，$|a|\le 2$ ならば $f_{2\cos\theta}(n)=2\cos n\theta$ であり,（3.1）が成り立つ．その際，$\dfrac{2\pi}{\theta}\in\boldsymbol{N}$ ならばこれが周期となる．たとえば，$a=\sqrt{2}$ のとき,

$$2\cos\theta=\sqrt{2}\ \text{より}\ \theta=\frac{\pi}{4}\text{，ゆえに，}\ f_{\sqrt{2}}(n)=2\cos\frac{n\pi}{4}\text{，周期は}\ \frac{2\pi}{\theta}=8\,.$$

である.

また，$|a|>2$ の場合は，$f_a(n)$ の値は循環せず，他に顕著な規則性も見られない．ここでは，$a\ge 3\,(\in\boldsymbol{N})$ として，特定の自然数を法とする $f_a(n)$ の剰余類を考えることにする.

Excel による数値実験から，たとえば，$a=3$ ならば,

$$f_3(3k)\equiv 0,\quad f_3(3k\pm 1)\equiv 1\pmod{2}$$

$$f_3(4k)\equiv 2,\quad f_3(4k\pm 1)\equiv 0,\quad f_3(4k-2)\equiv 1 \pmod{.3}$$

であり, 2, 3 を法とする剰余は，それぞれ周期 3, 4 で循環することが予想される．さらに，

$$\left.\begin{array}{l} f_a(4k)\equiv 2,\ f_a(4k\pm 1)\equiv 0,\ f_a(4k-2)\equiv -2 \pmod{.a} \\ f_a(6k)\equiv 2,\ f_a(6k\pm 1)\equiv 1,\ f_a(6k\pm 2)\equiv -1,\ f_a(6k+3)\equiv -2 \pmod{.(a-1)} \\ f_a(n)\equiv 2 \pmod{.(a-2)} \end{array}\right\}\ (3.4)$$

が予想される．mod.$(a-1)$の場合を示すには, (1.1) に剰余の定理を用いて得られる

$$f_1(1)\equiv 1,\quad f_1(2)=1^2-2\equiv -1,\quad f_1(3)=1^3-3\cdot 1\equiv -2$$

を (2.1) に順次適用すればよい．他の場合も同様である．

$m\geq 3\ (\in \boldsymbol{N})$を定数として mod.$(a-m)$について数値実験した場合，上記のように$a$の値を固定して$n$の値を動かしても明確な規則性は見られない．逆に，$n$の値を固定して$a$の値を動かすと，

$$a\geq m^2+m-1 \text{ のとき，}\quad f_a(2)\equiv m^2-2 \pmod{.(a-m)}$$

が予想されるが，これは剰余の定理から明白であろう．$a\geq m^2+m-1$なる条件は，剰余としての大小関係の要件$m^2-2<a-m$を変形したものである．一般的には，

$$a\geq f_m(n)+m+1 \text{ のとき，}\quad f_a(n)\equiv f_m(n) \pmod{.(a-m)}$$

が成り立つ．

4. おわりに

本稿は冒頭に掲げた入試問題を発端として直接に考察したものであるため，関連する文献やウェブサイトを (存在するのかも知れないが) 紹介することができない．

代わりに，本稿の考察をもとに創作した問題を掲げて筆を置くことにする．

問 1.　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$のとき，$x^{100}+\dfrac{1}{x^{100}}$の値を求めよ．

略解.　$2\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$とおくと$\theta=\dfrac{\pi}{12}$．$f_{2\cos\frac{\pi}{12}}(100)=2\cos\dfrac{100\pi}{12}=2\cos\dfrac{4\pi}{12}=1$．

問 2.　二次方程式$x^2-ax+1=0$が実数解をもたないとき，$\left|x^{100}+\dfrac{1}{x^{100}}\right|\leq 2$を示せ．

略解.　$x+\dfrac{1}{x}=a$かつ$|a|<2$より, (3.3)を示せばよい．

問 3.　自然数定数aに対し，二次方程式$x^2-ax+1=0$が異なる 2 つの実数解をもつとする．$x^{100}+\dfrac{1}{x^{100}}$の整数部分を$a-1$で割ったときの余りを求めよ．

略解.　$x+\dfrac{1}{x}=a$かつ$a\geq 3$であり，$n=100$すなわち$n=6k-2$の場合であるから, (3.4) より$f_a(100)\equiv -1 \pmod{.(a-1)}$．ゆえに，求める余りは$a-2$．