$\tan\theta$ の加法定理から

～ 三角関数が内包する多様な世界 ～

2016 年 2 月

坂 田 雅 弘

1．はじめに

三角関数は，その単純な定義に比して多種多様な関係式をもっている．大学入試においては，相互関係・加法定理・和積公式などを用いた等式の証明問題が数多く見られ，

$$\cos^2\theta+\cos^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$$ （1991 年，学習院大学）

$$\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{9\pi}{10}=\frac{5}{16}$$ （1996 年，京都大学）

$$\cos^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{7\pi}{18}+\cos^2\frac{13\pi}{18}=\frac{3}{2}$$ （2003 年，早稲田大学）

$$\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\frac{1}{8} \qquad (1.1)$$ （2005 年，自治医科大学）

$$\tan 1°\ \tan 2°\ \tan 3°\cdots\cdots\tan 88°\ \tan 89°=1 \qquad (1.2)$$ （2011 年，同志社大学）

などの特殊な数値に関する計算問題も多い．その多くは比較的手間がかかる機械的な計算を要するものであるが，(1.2) は，手間がかかりそうな見かけに反して単純計算で解が得られる．3 年前に千葉大学理学部において出題された，

$$\tan 10°=\tan 20°\ \tan 30°\ \tan 40° \qquad (1.3)$$ （2013 年，千葉大学）

も同様である．(1.2) や (1.3) は，「問題の簡潔性」，「規則の単純性」，「結果の意外性」，「解法の多様性」の 4 点から大変に興味深い問題と言えよう．

筆者は，これらの問題に触発され，同様の関係式を探求してみた．

2．$\tan\theta$ の加法定理から

(1.2) は，$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ ……(2.1) を用いれば容易に解が得られる．同様の手法で得られるものとして，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ および $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いた

$$\sum_{\theta=1°}^{89°}\sin^2\theta=\sum_{\theta=1°}^{89°}\cos^2\theta=\frac{89}{2}$$

がある．分数を回避するため，$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ および $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ を用いて，

$$\sum_{\theta=1°}^{180°}\sin^2\theta=\sum_{\theta=1°}^{180°}\cos^2\theta=90,\ \text{または}\ \sum_{\theta=0°}^{180°}\sin^2\theta=90,\ \sum_{\theta=0°}^{180°}\cos^2\theta=91$$

のように修正しておこう．

(1.3)を示すには，$\tan\theta$の加法定理を用いて得られる3倍角の公式を変形した

$$\tan\theta\,\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=\tan 3\theta \qquad (2.2)$$

に$\theta=10°$を代入して(2.1)を用いればよい．解法は他にもあるが，誌面の都合で割愛する．

一つの式に含まれる角度が等差数列をなすという単純な規則性に基づいて，他の関係式を探してみよう．(1.3)に(2.1)を用いれば，

$$\tan 80°=\tan 70°\ \tan 60°\ \tan 50°$$

が得られる．また，$A+B+C=\pi$ならば$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$であるから，

$$\tan 80°=\tan 70°+\tan 60°+\tan 50°$$

も成り立つ．(2.2)に$\theta=5°$を代入して(2.1)を用いれば，

$\tan 5°=\tan 15°\ \tan 25°\ \tan 35°$，または$\tan 85°=\tan 75°\ \tan 65°\ \tan 55°$

が得られる．

同様の関係式として，$\cos\theta$の加法定理を用いて得られる3倍角の公式を変形した

$$4\cos\theta\,\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=\cos 3\theta \qquad (2.3)$$

などがあり，(2.3)に$\theta=20°$を代入すれば(1.1)が得られる．

3．三角関数の加法定理から

単純な計算によって得られる

$$\tan\theta_1-\tan\theta_2=\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos\theta_1\cos\theta_2}\text{，すなわち }\tan(\theta+1)°-\tan\theta°=\frac{\sin 1°}{\cos(\theta+1)°\cos\theta°}$$

に$\theta=0°, 1°, 2°, \cdots\cdots, 44°$を代入して辺々加えると，

$$\sum_{\theta=0°}^{44°}\frac{\sin 1°}{\cos\theta\cos(\theta+1)}=1$$

が得られる．また，加法定理より$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$ならば$(\tan\theta_1+1)(\tan\theta_2+1)=2$であるから，

$$\prod_{\theta=1°}^{45°}(\tan\theta+1)=2^{23}$$

が得られ，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$の場合についても同様に，

$$\prod_{\theta=1°}^{29°}(\tan\theta+\sqrt{3})=2^{29},\quad \prod_{\theta=1°}^{59°}(\sqrt{3}\tan\theta+1)=2^{59}$$

が得られる．

$\sin\theta$, $\cos\theta$の加法定理については，たとえば，任意の$\theta\in\boldsymbol{R}$と定数$\varphi\in\boldsymbol{R}$に関する恒等式

$$\cos\theta\cos(\theta+\varphi)+\sin\theta\sin(\theta+\varphi)=\cos\varphi$$

に$\theta=0°, 1°, 2°, \cdots\cdots, 89°$，$\varphi=1°$を代入して辺々加えると，

$$\sum_{\theta=0°}^{89°}\{\cos\theta\cos(\theta+1°)+\sin\theta\sin(\theta+1°)\}=2\sum_{\theta=0°}^{89°}\cos\theta\cos(\theta+1°)=90\cos1°$$

が成り立ち，これより，

$$\sum_{\theta=0°}^{89°}\frac{\cos\theta\cos(\theta+1°)}{\cos1°}=45$$

が得られる．

4．拡張と一般化

(1.2)は$\tan\theta$の積であったから，これを$\sin\theta$の積に変えてみよう．

$$\prod_{\theta=1°}^{89°}\sin\theta=P_1P_2\quad\left(\text{ただし，}P_1=\prod_{\theta=1°}^{45°}\sin(2\theta-1°),\ P_2=\prod_{\theta=1°}^{44°}\sin2\theta\right)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}P_1P_2&=\sin45°\cdot\prod_{\theta=1°}^{44°}\sin\theta\,\sin(90°-\theta)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\prod_{\theta=1°}^{44°}\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2^{45}}\prod_{\theta=1°}^{44°}\sin2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2^{45}}P_2\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$P_1=\prod_{\theta=1°}^{45°}\sin(2\theta-1°)=\frac{\sqrt{2}}{2^{45}},\ \text{または}P_1=\prod_{\theta=1°}^{45°}2\sin(2\theta-1°)=\sqrt{2}$$

が得られる．同様の手法で$\theta>90°$の場合にも拡張すると，

$$\prod_{\theta=1°}^{90°}2\sin(2\theta-1°)=2\tag{4.1}$$

が得られる．

また，(1.2)の拡張として，

$$\prod_{\theta=1°}^{89°}\tan n\theta=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\quad(n\equiv1\ (\mathrm{mod}.2),\ n\notin(3\boldsymbol{Z}\cup5\boldsymbol{Z}))\tag{4.2}$$

が予想される．(1.2)は(4.2)における$n=1$の場合である．これは，

$$\prod_{\theta=1°}^{89°}\tan n\theta=\prod_{\theta=1°}^{89°}\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}=\tan(45°n)\cdot\prod_{\theta=1°}^{44°}\frac{\sin n\theta\,\sin((90°-\theta)n)}{\cos n\theta\,\cos((90°-\theta)n)}$$

$$= \tan(45^\circ n)\cdot\prod_{\theta=1^\circ}^{44^\circ}\frac{-\frac{1}{2}\{\cos(90^\circ n)-\cos((90^\circ-2\theta)n)\}}{\frac{1}{2}\{\cos(90^\circ n)+\cos((90^\circ-2\theta)n)\}} = \tan(45^\circ n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

のように示せる．n の条件は $\cos n\theta \neq 0$，すなわち $\theta = 1^\circ, 2^\circ, \cdots\cdots, 89^\circ$ をみたす任意の θ に対して $n\theta \neq 90^\circ k\ (k \in \boldsymbol{N})$ であることである．

Excel を用いた数値実験から得られるこのような関係式は，枚挙にいとまがない．

たとえば，(4.1) に類似した式として，

$$\prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} 2\sin\left\{2\theta \pm \left(\frac{1}{3}\right)^\circ\right\} = \prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} 2\sin\left\{2\theta \pm \left(\frac{5}{3}\right)^\circ\right\} = \pm 1$$

$$\prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} 2\sin\left\{2\theta \pm \left(\frac{2}{3}\right)^\circ\right\} = \prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} 2\sin\left\{2\theta \pm \left(\frac{4}{3}\right)^\circ\right\} = \pm\sqrt{3}$$

$$\prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} 2\sin\left\{2\theta \pm \left(\frac{1}{5}\right)^\circ\right\} = \prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} 2\sin\left\{2\theta \pm \left(\frac{3}{5}\right)^\circ\right\} = \pm\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

などが次々に得られるし，(4.2) に類似した式として，

$$\prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} \tan(p\theta - q^\circ) = 1 \quad \left(p\,(\geq 3) \equiv 1\ (\mathrm{mod}.2),\ q = \frac{p}{2}\right)$$

$$\prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} \tan(p\theta - q^\circ) = -1 \quad \left(p\,(>0) \equiv 2\ (\mathrm{mod}.4),\ q \in \boldsymbol{R},\ 0 < |q| < p\right)$$

$$\prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} \tan(4p\theta - q^\circ) = -1 \quad \left(p \equiv 1\ (\mathrm{mod}.2),\ p \notin (3\boldsymbol{Z} \cup 5\boldsymbol{Z}),\ q \in \boldsymbol{R},\ 0 < |q| < p\right)$$

$$\prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} \tan(12\theta - q^\circ) = 1 \quad (q = \pm 3, \pm 9),\quad \prod_{\theta=1^\circ}^{90^\circ} \tan(12\theta - q^\circ) = 27 \quad (q = \pm 4, \pm 8)$$

などが次々に得られる．その他にもおびただしい数の関係式を得たが，誌面の都合上，割愛せざるを得ない．

今回の式変形や数値実験で得られた関係式の多くは筆者自身も初めて目にするものであり，それらの探求していくことは非常に魅惑的な経験であった．日々の授業において生徒を指導するにあたっては，教員側もつねに新たな数学を探求しつつ，数学に対する新鮮な魅力を感じながら取り組みたいものである．

【文献】

[1] 雲幸一郎『三角関数の問題』，月刊誌「大学への数学」，東京出版，2015 年 12 月号，p.44-47.

[2] Titu Andreescu, Zuming Feng, “103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team”, Birkhäuser, Boston, 2005.

[3] Jebrel M. Habeb, Mowaffaq Hajja, “A Method for Establishing Trigonometric”, Inequalities Involving the Cotangents of the Angles of a Triangle, Journal for Geometry and Graphics, Volume 12, 2008.