Eulerの分数式

～ その一般化と基本対称式による表現 ～

2013年2月
坂 田 雅 弘

1．はじめに

$k \in \boldsymbol{Z}$についての Eulerの分数式[1] $E(k)$

$$E(k) = \frac{a^k}{(a-b)(b-c)} + \frac{b^k}{(b-c)(c-a)} + \frac{c^k}{(c-a)(a-b)} \tag{1.1}$$

に対する計算

$$E(0) = E(1) = 0,\ E(2) = 1,\ E(3) = a+b+c$$

は，大学入試における頻出問題である．一方，上記以外のkの値について$E(k)$を求める問題については，これまで見かけたことがない．試みにkの値を変えてみると，

$$E(4) = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$
$$E(-1) = \frac{1}{abc},\ E(-2) = \frac{ab+bc+ca}{a^2b^2c^2}$$

などを得る．これより，任意の$k \in \boldsymbol{Z}$に対する$E(k)$の値に興味が湧くであろう．

2．定義と基本性質

相異なる$n (\in \boldsymbol{N})$個の定数$a_i (\in \boldsymbol{C}, i \in \boldsymbol{N}, i \le n)$に対し，$z$の多項式$g_n(z)$

$$g_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (z-a_i)$$

の展開式におけるz^{n-i}の係数を$(-1)^i \sigma_{ni}$とおく．すなわち，

$$\prod_{i=1}^{n} (z-a_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sigma_{ni} z^{n-i}$$

とおくと，σ_{ni}はa_iについての基本対称式であり，任意の$k \in \boldsymbol{Z}$に対し，

$$E_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\,k}}{\dfrac{d}{dz} g_n(a_i)}$$

は，σ_{ni}の有理式すなわちa_iの対称有理式になる．$n=3$ならば，

$$g_3(z) = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$$

[1] この呼称は文献 [1] による．

$$\frac{d}{dz}g_3(z)=(z-a_2)(z-a_3)+(z-a_1)(z-a_3)+(z-a_1)(z-a_2)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i^k}{\frac{d}{dz}g_3(a_i)}=\frac{a_1^k}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)}+\frac{a_2^k}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^k}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

であるから，(1.1) の $E(k)$ は $E_3(k)$ にほかならない．

Lagrangeの補間式[2] $f(z)$

$$f(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)}{\frac{d}{dz}g_n(a_i)}\frac{g_n(z)}{z-a_i} \tag{2.1}$$

において，$f(z)=z^k\ (0\le k\le n-1)$ に対する両辺の z^{n-1} の係数を比較すれば，

$$E_n(k)=0\quad(0\le k\le n-2),\quad E_n(n-1)=1 \tag{2.2}$$

を得る．たとえば，$n=3$ ならば，

$$f(z)=\frac{f(a_1)}{\frac{d}{dz}g_3(a_1)}\frac{g_3(z)}{z-a_1}+\frac{f(a_2)}{\frac{d}{dz}g_3(a_2)}\frac{g_3(z)}{z-a_2}+\frac{f(a_3)}{\frac{d}{dz}g_3(a_3)}\frac{g_3(z)}{z-a_3}$$

であり，$f(z)=z^0$ とおくと，

$$\begin{aligned}1&=\frac{(z-a_2)(z-a_3)}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)}+\frac{(z-a_1)(z-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\\&=\left\{\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}\right\}z^2+\cdots\cdots\end{aligned}$$

より $E_3(0)=0$ を得る．同様に，(2.1) において $f(z)=z^1,z^2$ に対する z^2 の係数を比較すれば，$E_3(1)=0$，$E_3(2)=1$ を得る．

3．$E_n(k)$ の漸化式

冪和対称式 $S_n(k)$

$$S_n(k)=\sum_{i=1}^{n}a_i^k$$

に関するNewton-Girardの公式[3]

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_{ni}S_n(k-i)=0$$

はよく知られている．$E_n(k)$ についてもこれと同様の公式

[2] http://mathworld.wolfram.com/LagrangeInterpolatingPolynomial.html 参照.

[3] http://mathworld.wolfram.com/Newton-GirardFormulas.html 参照.

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_{ni}E_n(k-i)=0 \quad (k\geq n) \tag{3.1}$$

が成り立つ．たとえば，$n=3$ならば

$$E_3(4)=\sigma_{31}^{\ 2}-\sigma_{32}=\sigma_{31}E_3(3)-\sigma_{32}E_3(2)+\sigma_{33}E_3(1)$$
$$E_3(5)=\sigma_{31}^{\ 3}-2\sigma_{31}\sigma_{32}+\sigma_{33}=\sigma_{31}E_3(4)-\sigma_{32}E_3(3)+\sigma_{33}E_3(2)$$
$$E_3(6)=\sigma_{31}^{\ 4}-3\sigma_{31}^{\ 2}\sigma_{32}+\sigma_{32}^{\ 2}+\sigma_{31}\sigma_{33}=\sigma_{31}E_3(5)-\sigma_{32}E_3(4)+\sigma_{33}E_3(3)$$

であるから，(3.1)における$n=3, k\geq n$の場合として，

$$E_3(k)-\sigma_{31}E_3(k-1)+\sigma_{32}E_3(k-2)-\sigma_{33}E_3(k-3)=0 \tag{3.2}$$

が成り立っている．(3.2)は，

$$E_3(k)=-\frac{a_1^k(a_2-a_3)+a_2^k(a_3-a_1)+a_3^k(a_1-a_2)}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)}$$

の分子を$e_3(k)$とおけば

$$\begin{aligned}&\sigma_{31}e_3(k-1)+\sigma_{32}e_3(k-2)-\sigma_{33}e_3(k-3)\\&=(a_1+a_2+a_3)\left\{a_1^{k-1}(a_2-a_3)+a_2^{k-1}(a_3-a_1)+a_3^{k-1}(a_1-a_2)\right\}\\&\quad-(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)\left\{a_1^{k-2}(a_2-a_3)+a_2^{k-2}(a_3-a_1)+a_3^{k-2}(a_1-a_2)\right\}\\&\quad-a_1a_2a_3\left\{a_1^{k-3}(a_2-a_3)+a_2^{k-3}(a_3-a_1)+a_3^{k-3}(a_1-a_2)\right\}\end{aligned}$$

であり，これより$e_3(k)$が得られることから示せる．

4．$\boldsymbol{E_n(k)}$の$\boldsymbol{\sigma_{ni}}$による表現

$E_n(k)$ $(k\in\mathbf{Z}, k\geq 0)$について，$0\leq k\leq n-1$の場合は，(2.2)より

$$E_n(k)=0 \quad (0\leq k\leq n-2),\quad E_n(n-1)=1$$

であった．本節では，$k\geq n$の場合，すなわち$E_n(n+l)$ $(l\in\mathbf{Z}, l\geq 0)$を考察する．(2.2)および(3.1)より

$$E_n(n)=\sigma_{n1}$$
$$E_n(n+1)=\sigma_{n1}^{\ 2}-\sigma_{n2}$$
$$E_n(n+2)=\sigma_{n1}^{\ 3}-2\sigma_{n1}\sigma_{n2}+\sigma_{n3}$$
$$E_n(n+3)=\sigma_{n1}^{\ 4}-3\sigma_{n1}^{\ 2}\sigma_{n2}+\sigma_{n2}^{\ 2}+2\sigma_{n1}\sigma_{n3}-\sigma_{n4}$$
$$\begin{aligned}E_n(n+4)&=\sigma_{n1}^{\ 5}-4\sigma_{n1}^{\ 3}\sigma_{n2}+3\sigma_{n1}^{\ 2}\sigma_{n3}\\&\quad+3\sigma_{n1}\sigma_{n2}^{\ 2}-2\sigma_{n2}\sigma_{n3}-2\sigma_{n1}\sigma_{n4}+\sigma_{n5}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}E_n(n+5)&=\sigma_{n1}^{\ 6}-5\sigma_{n1}^{\ 4}\sigma_{n2}+4\sigma_{n1}^{\ 3}\sigma_{n3}+6\sigma_{n1}^{\ 2}\sigma_{n2}^{\ 2}-3\sigma_{n1}^{\ 2}\sigma_{n4}\\&\quad-6\sigma_{n1}\sigma_{n2}\sigma_{n3}+2\sigma_{n1}\sigma_{n5}+2\sigma_{n2}\sigma_{n4}-\sigma_{n2}^{\ 3}+\sigma_{n3}^{\ 2}-\sigma_{n6}\end{aligned}$$

$$E_n(n+6)=\sigma_{n1}{}^7-6\sigma_{n1}{}^5\sigma_{n2}+5\sigma_{n1}{}^4\sigma_{n3}+10\sigma_{n1}{}^3\sigma_{n2}{}^2-4\sigma_{n1}{}^3\sigma_{n4}$$
$$-12\sigma_{n1}{}^2\sigma_{n2}\sigma_{n3}+3\sigma_{n1}{}^2\sigma_{n5}+6\sigma_{n1}\sigma_{n2}\sigma_{n4}-4\sigma_{n1}\sigma_{n2}{}^3+3\sigma_{n1}\sigma_{n3}{}^2$$
$$-2\sigma_{n1}\sigma_{n6}+3\sigma_{n2}{}^2\sigma_{n3}-2\sigma_{n2}\sigma_{n5}-2\sigma_{n3}\sigma_{n4}+\sigma_{n7}$$

などを得る．各 $E_n(n+l)$ について観察すれば，次のことが分かる．

i） $l+1<i$ ならば σ_{ni} を含む項は生じない．この場合は便宜的に $\sigma_{ni}=0$ と定める．

ii）各項に含まれる σ_{ni} の指数を α_i とする．各項の係数の符号は

$$(-1)^{(l+1)+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_{l+1})}$$

を満たし，係数の絶対値は

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_{l+1})!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\cdots\alpha_{l+1}!}$$

を満たす．

iii）各項の係数以外の部分を $\sigma_{n1}{}^{\alpha_1}\sigma_{n2}{}^{\alpha_2}\cdots\cdots\sigma_{n(l+1)}{}^{\alpha_{l+1}}$ とすると，

$$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots\cdots+(l+1)\alpha_{l+1}=l+1$$

が成り立ち，$l\geq 1$ のとき，$E_n(n+l)$ は，この式を満たすすべての α_i の組み合わせに対して $1+\sum_{k=1}^{l}2^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ 個の項が生ずる．

以上の考察から，

$$E_n(n+l)=\sum_{\sum_{t=1}^{l+1}t\alpha_t=l+1}\left\{(-1)^{(l+1)+\sum_{i=1}^{l+1}\alpha_i}\frac{\left(\sum\alpha_t\right)!}{\prod(\alpha_t)!}\prod_{t=1}^{l+1}\sigma_{nt}{}^{\alpha_t}\right\}$$

を得る．

以上に述べたのは $E_n(k)$ $(k\in\mathbf{Z},k\geq 0)$ の場合についてであるが，$k<0$ の場合ついても同様に考察による上記の類似した等式が得られる．

なお，最近になって，文献[2],[3]のような取り組みがあることを知った．本稿における命題もすべて数学的帰納法によって証明できるものであり，多少の煩雑さを厭わなければ高校生にも充分に研究可能なものである．

【文献】

［1］高木貞治『代数学講義 改訂新版』共立出版, 1965, pp.144-146

［2］山崎朋幸『Newton 多項式について』学習院大学理学部数学科 飯高茂研究室 2010 年度卒業研究

［3］重村卓人『n 乗和の基本対称式での表し方』灘高校 数学研究部 部誌 2012

［4］John Konvalina, “A Generalization of Waring’s Formula”, Journal of combinatorial theory, Series A75, 1996, pp.281-294

［5］H.W.Gould, “The Girard-Waring power sum formulas for symmetric functions and Fibonacci sequence”, Fibonacci Quart, 37 (2), 1999, pp.135-140