交代冪和の性質

～「特殊から一般へ！」[1]の試み ～

2011 年 2 月

坂 田 雅 弘

1．はじめに

$k(\in \boldsymbol{N})$個の$n(\in \boldsymbol{N})$乗数の和については，いわゆる冪和公式（Faulhaber の公式）

$$S_n(k)=\sum_{i=1}^{k} i^n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i\,k^{n+1-i}\quad (B_i \text{ は Bernoulli 数})$$

が知られており（文献[1],[2]），その研究は数多く存在する（文献[3],[4]）．一方，交代冪和

$$T_n(k)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k-i}\,i^n$$

については，文献[5]など少数の例を数えるのみでその研究はほとんど知られていない．

昨年度の埼玉県公立高校学力検査において，交代平方和$T_2(k)$を題材とした出題があった．筆者はこの問題を契機として$T_2(k)$や$T_3(k)$を考察し，

$$T_2(k)=S_1(k),\quad \{T_2(k)\}^2=S_3(k)$$

のような周知の関係式のほか，$m(\in \boldsymbol{N})$を任意定数とするkの恒等式

$$T_2(k+2m)-2T_2(k+m)+T_2(k)=m^2 \tag{1.1}$$

$$T_2(k+3m)-3T_2(k+2m)+3T_2(k+m)-T_2(k)=0$$

$$T_3(k+3m)-3T_3(k+2m)+3T_3(k+m)-T_3(k)=3m^3+\frac{(-1)^{m+k}-(-1)^k}{2}$$

等を得た．これらをもとに，交代冪和とその拡張ついて考察した．

2．S.M.Ruiz の恒等式

上記の等式を数学的帰納法で証明する過程において，恒等式

$$(k+3)^2-2(k+2)^2+(k+1)^2=2$$
$$(k+4)^3-3(k+3)^3-3(k+2)^3+(k+1)^3=6$$

などが現れる．$k(\in \boldsymbol{N})$を$x(\in \boldsymbol{R})$に換え，括弧内の各項の差を任意定数$s(\in \boldsymbol{R})$に換えて係数・項数・次数を操作すると，

[1] 高木貞治『近世数学史談 3 版』共立出版, 1970, p.57

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(x+si)^{n}=s^{n}n! \tag{2.1}$$

が得られる. (2.1)を用いれば, $n>r$ をみたす任意の $r(\in \boldsymbol{N})$ について

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(x+si)^{n-r}=0 \tag{2.2}$$

を導くことは容易である. 実際, (2.1)の両辺に r 階微分 $\dfrac{d^r}{dx^r}$ を施せばよい.

比較的きれいな形をしているので既知の等式であろうと予想して検索すると, 上記の等式において $s=1$ とした場合と同値の恒等式を Sebastián Martín Ruiz の論文[6]に見出した. ここではこの恒等式が数論における Wilson の定理の別証を与えるための補題として用いられ, 微分を援用した数学的帰納法により証明されている[2]. 筆者がこれを「S.M.Ruiz の恒等式」と仮称する理由は, Wolfram MathWorld が彼の名を冠してこの恒等式を紹介していることによるが[3], 一方, Ruiz に言及しつつも「Euler の公式」として紹介する文献も存在する(文献[7]).

3. S.M.の恒等式

(1.1)において $m=2$ とおくと,

$$(k+4)^2-(k+3)^2-(k+2)^2+(k+1)^2=4$$

が現れる(余談であるが, これは筆者が中学 3 年生時に発見した思い出深い恒等式である). 先と同様に $k(\in \boldsymbol{N})$ を $x(\in \boldsymbol{R})$ に換え, 係数を ±1 に限定して係数・項数・次数を操作すると, $s(\in \boldsymbol{R})$ を任意定数とする $x(\in \boldsymbol{R})$ の恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x-si)^n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}s^n n! \quad \left(\varphi_i=(-1)^{i-1}\prod_{h=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{i-1}{2^h}\right]}\right) \tag{3.1}$$

を得る. φ_n は ±1 のいずれかの値をとり,

$$\varphi_{2^h+1}=(-1)^{2^h+i-1}\prod_{h=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{2^h+i-1}{2^h}\right]}=-(-1)^{i-1}\prod_{h=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{i-1}{2^h}\right]}=-\varphi_i$$

より, 漸化式

$$\varphi_1=1,\ \varphi_2=-1,\ \varphi_{2^h+i}=-\varphi_i \quad (i,h\in \boldsymbol{N},\ 0<i\leq 2^h) \tag{3.2}$$

みたす.

証明は $n(\in \boldsymbol{N})$ についての数学的帰納法による. $n=1$ の場合は明白であるから, ある n の場合に(3.1)を仮定し, $x(\in \boldsymbol{R})$ を $t(\in \boldsymbol{R})$ に置き換えた上で, これを t の関数と見た形式

---

2 https://arxiv.org/abs/math/0410241

3 http://mathworld.wolfram.com/BinomialSums.html

的な定積分

$$(n+1)\int_{x-2^n\cdot s}^{x}\sum_{i=1}^{2^n}\varphi_i(t-si)^n dt = (n+1)\int_{x-2^n\cdot s}^{x} 2^{\frac{n(n-1)}{2}} s^n n!\,dt$$

を考える．左辺は，(3.2)を用いれば

$$\sum_{i=1}^{2^n}\varphi_i(x-si)^{n+1}-\sum_{i=1}^{2^n}\varphi_i\{x-s(2^n+i)\}^{n+1}=\sum_{i=1}^{2^n+2^n}\varphi_i(x-si)^{n+1}$$

であり，右辺は，

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}s^n(n+1)!\cdot 2^n s = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}s^{n+1}(n+1)!$$

であるから，$n+1$の場合も成り立つ．また，(3.1)においてr階微分$\dfrac{d^r}{dx^r}$を施せば，$n>r$をみたす任意の$r(\in \boldsymbol{N})$について

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x-si)^{n-r}=0 \tag{3.3}$$

を容易に導ける．

筆者が検索した限り，(3.1)と同値の恒等式に言及した文献を見出せなかった．そこで，これを暫定的に「S.M.の恒等式」と名付けたい．前節の仮称の似て非なるこの等式はS.M.Ruizとの関連はなく，僭越ながら筆者のイニシャルである．

$T_2(k)$や$T_3(k)$について(3.1)と同様の関係式を考えると，

$$\sum_{i=1}^{4}\varphi_{5-i}T_2(k+i)=2,\quad \sum_{i=1}^{8}\varphi_{9-i}T_3(k+i)=24 \tag{3.4}$$

が得られる．いま，

$$U_s(n)=\sum_{h=1}^{2^n}\left\{\varphi_{2^n+1-h}\left(\sum_{i=1}^{h}(-1)^{h-i}(x+si)^{n-r}\right)\right\} \tag{3.5}$$

とおくと，(3.4)は

$$U_1(2)=2,\quad U_1(3)=24$$

と同値である．このとき，$s(\in \boldsymbol{R})$を任意定数とする$x(\in \boldsymbol{R})$の恒等式

$$U_s(n)=2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}s^n n!$$

が成り立ち，$n>r$をみたす任意の$r(\in \boldsymbol{N})$について

$$U_s(n-r)=0$$

も成り立つ．証明は，(3.1)や(3.3)の場合と同様である．

4. 未解決問題と展望

前節までに述べた結果はここ数ヶ月の断続的な数値実験によるものであり，計画的な研究に基づくものではない．したがって，本稿発表時までに結果が得られなかった未解決問題がいくつか存在し，その理論的背景についてまでは考察の範囲が及んでいない．博学多才なる C.F.Gauss は理論を美しく体系化するまでは結果を公表しなかったと言われるが，浅学非才なる筆者の場合は，Gauss を気取っていると発表の機会は永久に得られない．内容の洗練は他日を期することとし，以下，未解決問題と今後の展望にふれて本稿を終えることにしたい．

Ruiz の恒等式（2.1）と S.M.の恒等式（3.2）の関係として，

$$\sum_{h=1}^{2^n-n}\left\{\lambda_{h,n}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(x-i-h)^n\right)\right\}=\sum_{i=1}^{2^n}\varphi_i(x-i)^n$$

（$\lambda_{h,n}$ は $\displaystyle\sum_{h=1}^{2^n-n}\lambda_{h,n}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ かつ $\lambda_{h,n}=\lambda_{2^n-n-(h-1),\,n}$ をみたす）

が成り立つ．$\lambda_{h,n}$ を個々に求めることは可能であるが，定式化には至っていない．

また，$T_n(k)$ について（2.1）と同様の関係式を考えると，

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}T_n(k+si)=\frac{1}{2}s^n n!+\tau_n\frac{(-1)^{n(s+k)}-(-1)^{nk}}{2}$$

が成り立つ．τ_n を個々に求めることは可能であるが，やはり定式化には至っていない．これを（3.5）と同様の関係式に拡張することも今後の課題である．

さらに，（3.1）における φ_n の定義を他のものに変えた場合にも興味深い恒等式がいくつか得られる．これらについては別の機会に譲ることにしよう．

一方，意欲ある高校生への教材化も考えたい．冒頭に述べた通り，交代冪和に関する研究はほとんど知られておらず，これに関する新たな事実や性質を発見する余地は広い．SSH 指定校による実践報告の中には Excel や Grapes 等を用いた数値実験と考察から種々の数学的事象を生徒が自主的に見出す指導が挙げられている．本稿で紹介した等式はすべて Excel を用いた数値実験で得られたものであるから，適切な指導を施せば生徒が自ら発見できるものであり，そのための教材化も今後の課題である．

【文献】

［1］荒川恒男，伊吹山知義，金子昌信『ベルヌーイ数とゼータ関数』（牧野書店, 2001）
［2］John H.Conway and Richard Guy, “The Book of Numbers”, Springer, 1996
［3］D.E.Knuth, “Johann Faulhaber and sums of powers”, Mathematics of Computation Vol.61, No.203, 1993
［4］A.F.Beardon, “Sums of powers of integers”, The American Mathematics Monthly 103, 1996
［5］F.T.Howard, “Sums of powers of integer via generating functions”, Fibonacci Quarterly, 34.3. 1996
［6］S.M.Ruiz, “An Algebraic Identity Leading to Wilson’s Theorem”, The Mathematical Gazette Vol.80, No.489, 1996
［7］Thomas Koshy, “Elementary Number Theory With Applications”, Ed.2, Academic Press, 2007